NEW LEFT REVIEW 124

SEGUNDA ÉPOCA

SEPTIEMBRE - OCTUBRE 2020

ARTÍCULO

CRÍTICA

WWW.NEWLEFTREVIEW.ES

INSTITUTO 25M DEMOCRACIA

tds traficantes de sueños

ALICE MACKENZIE BAMFORD

Alice se incorporó a la NLR *en 2017, primero como becaria y luego como editora adjunta. En cierto sentido, estaba en su casa. En 1984, cuatro años antes de que naciera, su padre, el sociólogo Donald MacKenzie, había escrito un convincente análisis de la planificación estadounidense de la guerra nuclear para la* NLR *I/148. Su madre, Caroline Bamford, había realizado su investigación doctoral sobre la Nueva Izquierda británica, y Alice contaba que había crecido junto a una estantería de viejas* NLR*, apropiadamente mordisqueadas por los ratones, en su dormitorio de la casa familiar en las afueras de Edimburgo. Era una intelectual de altos vuelos: primera en inglés en la Universidad de Edimburgo, con un master en Oxford y una tesis en Cambridge sobre Crítica y Cultura, aprobada por aclamación sin correcciones. A continuación publicamos extractos de su deslumbrante tesis doctoral sobre matemáticas y literatura moderna, que confrontaba dialécticamente tratamientos literarios de las matemáticas –Musil, Beckett, Mallarmé, Valéry, «OuLiPo», Stein– con imágenes construidas a partir de manifiestos matemáticos. En Cambridge reunió un seminario de posgrado en teoría literaria y enseñó en el curso de primer grado de inglés. Pero, según decía, sabía exactamente cómo se sentía Wittgenstein en ese lugar. A finales de 2016 solicitó una pasantía en Verso, donde presentó ideas para una serie de filosofía de la ciencia: explorando, dijo riendo, en busca de un nuevo Paul Feyerabend. Pronto subió escaleras arriba a la* NLR*. Su primer artículo para la revista («En la estela de Trilling. El pathos del liberalismo»,* NLR *105, julio-agosto de 2017) fue una reseña del libro* Bleak Liberalism *de Amanda Anderson, que presentaba una crítica fina y penetrante adornada con su bello estilo regio: «El término "victoriano", aunque hace tiempo que ha perdido el sentido tan peyorativo que una vez tuvo [...], tampoco suele ser incontestablemente elogioso». El siguiente, «La talla dulce como filosofía»,* NLR *109, marzo-abril de 2018, nos presentaba a Bachelard trabajando en la misma trinchera que Bouvard y Pécuchet. Le siguió «Contraperformatividad»,* NLR *113, noviembre-diciembre de 2018, coescrito con Donald MacKenzie, un elegante ensayo en el que los «fallos» teorizados por la filosofía del lenguaje austiniana iluminan y problematizan las operaciones de los modelos matemáticos situados en el corazón de los mercados de derivados financieros. Era meticulosa en la corrección de textos, feliz de echar una mano en las tareas de oficina o de planificar salidas después del trabajo; al tiempo que participaba en todas las discusiones diarias sobre textos y cosas. Pero las golondrinas pueden sufrir vértigo; Alice también era vulnerable. Un diagnóstico de esclerosis múltiple –inconcebiblemente duro– llegó como un golpe letal, aunque ella siguió luchando. Vivía en el Whitmore Estate en East London, participando enérgicamente por la noche en los aplausos y caceroladas que resonaban desde los balcones durante el confinamiento. Su sentido de la solidaridad estaba profundamente arraigado: durante su estancia en el Hospital St Pancras se ofreció como intérprete para los migrantes abandonados y sin hogar que habían varado allí. En la segunda semana de mayo, un amigo que pasó por el hospital para comprobar si se encontraba bien la encontró en la cama, en paz. Espíritu jovial, decía el poeta: como una alegría desatada cuya carrera acaba de comenzar.*

ALICE BAMFORD

MATEMÁTICAS Y LITERATURA MODERNA

Pasajes de «La tiza y el arquitrabe»

I

Gamma, un estudiante, pregunta en la obra de teatro de Imre Lakatos *Proofs and Refutations*: «¿Por qué no hay críticos matemáticos al estilo de los críticos literarios capaces de desarrollar el gusto matemático mediante la crítica pública?»[1]. La pieza teatral de Lakatos se desarrolla en un aula en la que los estudiantes debaten la demostración del Teorema de Euler para los poliedros. *Proofs and Refutations* sigue el itinerario del Teorema desde su nacimiento como conjetura ingenua, pasando por los errores y revoluciones de las matemáticas del siglo XIX, hasta su mayoría de edad[2]. Recorriendo todo un siglo de historia de las matemáticas, los estudiantes aprenden la lección de Lakatos: el rigor y la prueba son valores y prácticas históricamente variables. *Proofs and Refutations* ofrece también una lección en cuanto al valor del error: el conocimiento matemático se desarrolla mediante la crítica dialéctica[3].

---

[*] Los pasajes que siguen están extraídos de la disertación «Chalk and te Architrave: Mathematics and Modern Literature» [La tiza y el arquitrabe: matemáticas y literatura moderna], por la que Alice MacKenzie Bamford recibió el grado de Doctora en Filosofía por la Universidad de Cambridge en 2015.

[1] Imre Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, 1976, p. 98; ed. cast.: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Madrid, 1978.

[2] Teorema de Euler: la conjetura de que para todos los poliedros el número de sus vértices, V, menos el número de sus aristas, A, más el número de sus caras, C, es 2 ($V - A + C = 2$).

[3] Lakatos resumió el proceso de la crítica dialéctica en su apéndice de *Proofs and Refutations*. Primero hay una conjetura original (la tesis) y se presenta una «demostración» («un experimento mental o esbozo de argumentación, que descompone la conjetura original en subconjeturas o lemas»). Luego viene la antítesis: se presentan

El enemigo declarado de Lakatos era la filosofía «formalista» de las matemáticas. En particular impugnó la *imagen* formalista de las matemáticas, que equiparaba tanto «su abstracción axiomática formal», como la filosofía de las matemáticas con las metamatemáticas. En opinión de Lakatos, el formalismo desconecta las matemáticas no solo de su filosofía, sino también de su historia:

> De acuerdo con la concepción formalista de las matemáticas, éstas no tienen propiamente historia. Cualquier formalista estaría básicamente de acuerdo con la observación expresada «románticamente» por Russell, aunque enunciada con toda seriedad, según la cual las *Laws of Thought* (1854) de Boole constituyeron «el primer libro jamás escrito sobre matemáticas»[4].

Las matemáticas se eximen además de la historia, en opinión de Lakatos, por su adhesión forzada a un estilo particular de escritura. Ese estilo «euclidiano» o «deductivista» impone una estructura fija en la presentación de las matemáticas: el texto comienza con una lista de axiomas, lemas y/o definiciones a la que sigue el teorema y a éste su demostración. Los lectores de matemáticas ven ahí un «acto mágico»: el estilo deductivista fortalece el dogma de que «todas las proposiciones son verdaderas y todas las inferencias válidas» y presenta las matemáticas «como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables»[5].

Al arrancar los resultados de su contexto heurístico y ocultar las conjeturas iniciales, los contraejemplos y el trabajo de análisis de las pruebas matemáticas del matemático, el estilo deductivista fortalece un sentido de finalidad y se amuralla contra la crítica. El «estilo deductivista», escribe Lakatos, «esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema en el curso del procedimiento de demostración son condenadas al olvido mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada». Lakatos aboga, en cambio, por la adopción de un estilo heurístico en el que el texto contaría la historia de su propia aparición: la aventura y la contienda de conjeturas, contraejemplos, críticas y análisis de demostraciones[6].

---

contraejemplos «globales» que parecen socavar la conjetura primitiva. La prueba se vuelve a examinar para encontrar el «lema culpable»: la subconjetura que puede dar cuenta de los contraejemplos globales. El lema culpable, que puede haber quedado oculto o se ha expresado incorrectamente en la prueba original, ahora se convierte en una condición explícita de la conjetura primitiva. Ésta es la síntesis: la conjetura mejorada, producida por el análisis de la demostración, reemplaza la conjetura primitiva. I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, cit., p. 127.

[4] *Ibid.*, p. 142.

[5] *Ibid.*, p. 166.

[6] *Ibid.*

2

El nuevo género sugerido por Gamma, la «crítica matemática», puede hallarse en forma de manifiestos, prefacios, parábolas y ensayos matemáticos que median y enmarcan el entrelazamiento de la disciplina con lo que entiende que es distinto de sí misma: los géneros liminales de la matemática moderna. Estas obras de crítica disciplinaria prescriptiva y performativa tratan de moldear el «gusto» matemático mediante la «crítica pública». Los manifiestos matemáticos fortalecen y reconfiguran los vínculos entre la autoconstrucción disciplinaria de las matemáticas, el repertorio de sus imágenes culturales y la estructura social en la que se inserta el conocimiento matemático. Las metáforas y las estrategias retóricas desplegadas en textos «perimatemáticos» o introductorios son mediadoras: traducen las matemáticas del lenguaje formal de demostraciones a una red de entrelazamiento históricos y retóricos. Al mismo tiempo, los manifiestos matemáticos movilizan las condiciones políticas y supuestos culturales de los momentos históricos en los que fueron escritos. En la crítica matemática del manifiesto se detectan rastros de la historia cultural y social de la disciplina, de la materialización de valores matemáticos como el rigor y la exactitud.

Los manifiestos marcan momentos cruciales en la historia de las matemáticas durante los siglos XIX y XX. La introducción al *Cours d'analyse* de Augustin-Louis Cauchy en 1821 es considerada por muchos historiadores de las matemáticas como el hito que marca la disyunción entre el enorme desarrollo productivo pero informal del cálculo durante el siglo y medio precedente y el inicio de su formalización. «Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik» (1921), de Hermann Weyl, fue la respuesta más mordaz a la «crisis de los fundamentos» de finales del siglo XIX y principios del XX, una crisis que fue en cierto sentido consecuencia de una serie de resultados matemáticos que mostraban contradicciones o límites intrínsecos en los esfuerzos de formalización. «L'architecture des mathématiques» (1948) de N. Bourbaki constituyó un esfuerzo enormemente influyente efectuado a mediados del siglo XX para refundar las matemáticas. «Nicolas Bourbaki» era el seudónimo colectivo de un grupo de matemáticos en su mayoría franceses cuyos *Éléments de mathématique* fueron diseñados para constituir una reconstrucción autosuficiente de los elementos fundamentales de las matemáticas modernas en un lenguaje en gran medida formalizado.

3

Los manifiestos matemáticos son obras de crítica disciplinaria polémica y performativa, que anuncian un nuevo programa fundacional en las matemáticas, rompen con el orden anterior y promueven cierta imagen de las matemáticas y su historia. Lo cierto es que existen amplios paralelismos entre las «matemáticas modernas» y otras formas de modernidad cultural: una ruptura con la tradición, un giro hacia el formalismo y un aumento de la autorreflexividad. Como tales, los manifiestos matemáticos pueden leerse junto con otros ejemplos del género: manifiestos literarios y artísticos como el «Manifesto tecnico della letteratura futurista» (1912) de Marinetti, el manifiesto «Vorticismo» (1914) de Pound, «¡A los artistas del mundo!» (1919) de Jlébnikov y los manifiestos de OuLiPo (1960-1973) de François Le Lionnais, Raymond Queneau y Jacques Roubaud.

Las referencias a las matemáticas impregnaban los manifiestos de las vanguardias europeas. El despliegue de las matemáticas como metáfora organizadora y las apelaciones a sus virtudes epistémicas son, de hecho, estrategias comunes en la construcción de movimientos literarios y artísticos; como ejemplos, cabe mencionar la definición de Novalis del romanticismo, el clasicismo geométrico de T. E. Hulme o las analogías matemáticas de los manifiestos vorticistas de Pound. Así como la historia de las matemáticas atestigua que no existe una «ruta real» hacia la precisión, la exactitud y el rigor fundacional modernos, sino, por el contrario, el despliegue cíclico y estratégico de los llamamientos a la consolidación, el repliegue, el rigor y el formalismo fundacionales, también la historia literaria refleja el despliegue cíclico y estratégico de las matemáticas como recurso cultural y simbólico en momentos de renegociación disciplinaria: Musil, Pound o Beckett.

4

La torrencial irrupción de Bourbaki, los *Éléments de mathématique*, tuvo como origen un proyecto convencional bastante modesto. Henri Cartan y André Weil eran dos jóvenes matemáticos encargados de impartir cursos sobre cálculo diferencial e integral en Estrasburgo. En sus memorias, Weil describe cómo Cartan se quejaba constantemente de la falta de un buen libro de texto de análisis y le importunaba con preguntas sobre cómo enseñar el curso de cálculo. Weil propuso resolver el problema para siempre: reunirían a un grupo de matemáticos (amigos suyos que enseñaban los mismos temas en varias universidades) y escribirían colectivamente lo que ellos consideraban un nuevo *Cours d'analyse*: un nuevo libro de texto de análisis desde los fundamentos. El grupo se reunió el 10 de diciembre de 1934 para discutir sobre ese «Traité d'analyse». El acta de aquella reunión registra:

> Weil presenta su proyecto: establecer el contenido del grado en cálculo diferencial e integral para los próximos veinticinco años escribiendo conjuntamente un tratado de análisis. Se acuerda que ese tratado será tan moderno como sea posible[7].

En la reunión del Comité del 14 de enero de 1935, el analista y especialista en teoría de funciones Szolem Mandelbrojt propuso «*un principe de généralité*»: que todas las teorías generales y abstractas necesarias se ofrecieran al principio del libro. «Debemos –dijo Weil– escribir un tratado que pueda ser utilizado por cualquiera: por los investigadores (profesores universitarios o no), por los estudiantes, por los futuros educadores, por los físicos y por todos los ingenieros»[8]. Como tales, las herramientas matemáticas debían presentarse en la forma más universal posible. Esa sección abstracta creció hasta engullir todo el tratado de análisis. El proyecto de Bourbaki fue reinventado como escritura del «manual definitivo de matemáticas»[9]. Hasta la elección del título, *Éléments de mathématique*, era provocadora: Bourbaki hablaba de «*mathématique*» en singular (en lugar de las *mathématiques* convencionales). Un borrador de introducción inédito se iniciaba con una nota aún más enérgica: «Hay una sola matemática, única e indivisible: de ahí la razón para el presente tratado, que expone sus elementos a la luz de veinticinco siglos»[10].

---

[7] Réunion du 10/12/1934, Delta 001, Archives de l'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki. Véase también André Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, Basilea, 1992, pp. 99-100.
[8] Réunion du 14/01/1935, Delta 002, pp. 2-3, Archives de l'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki.
[9] Leo Corry, «Writing the Ultimate Mathematics Textbook: Nicolas Bourbaki's *Éléments de mathématique*», en Eleanor Robson y Jacqueline Stedall (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford, 2009.
[10] «R145. Introduction au Livre I (Etat 2: Nunke)», Archives de l'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki.

5

El nombre «Bourbaki» evoca hoy día el estructuralismo matemático y un estilo austero, formalista y axiomático (y, de hecho, para los que cuentan con suficiente edad para recordarlo, remite a la «Nueva Matemática» de la reforma curricular de la década de 1960, de corta duración y con tanto peso de la teoría de conjuntos)[11]. Sin embargo, tanto el estructuralismo de Bourbaki como su estilo axiomático eran ambiguos, incluso contradictorios. Las estructuras de Bourbaki llevaban una doble vida. El término «estructura» tenía un significado tanto formal como no formal en su obra[12]. La imagen estructuralista de las matemáticas de Bourbaki pertenece sobre todo a su escritura perimatemática: a sus historias, parábolas, prefacios y manifiestos y, en particular, a «L'architecture des mathematiques», texto escrito por Jean Dieudonné, amigo de Weil, y publicado en un número especial de *Cahiers du Su*d coordinado por François Le Lionnais en 1948. Le Lionnais, ingeniero químico, poeta y matemático, volvería a publicar «L'architecture des mathematiques» en su obra en dos volúmenes *Les grands courants de la pensée mathématique* (un proyecto enciclopédico que, de hecho, nunca se completó)[13]. Luego se convertiría en miembro fundador del movimiento OuLiPo y escribiría sus primeros manifiestos.

El manifiesto de Bourbaki sostiene que, a pesar de la aparente división de las matemáticas en ramas especializadas, la disciplina puede y debe conservar su unidad. El «método axiomático» es el seguro de Bourbaki contra la amenaza de la fragmentación de la disciplina: contra la posibilidad de que las matemáticas se conviertan en «una torre de Babel

---

[11] En Alemania, la reacción contra la «Nueva Matemática» dio lugar a una portada de *Der Spiegel* el 25 de marzo de 1974 con el titular «¿Macht Mengenlehre krank?» [«¿Harta [a los niños] la teoría de conjuntos?»] junto al rostro de un niño de aspecto triste. En Estados Unidos, Morris Kline denunció las reformas educativas inspiradas en Bourbaki en *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*, Nueva York, 1973.

[12] En opinión del historiador israelí de las matemáticas Leo Corry, «Por un lado, [la «estructura»] sugería un esquema organizativo general para toda la disciplina, que resultó muy influyente. Por otro lado, comprendía un concepto que estaba destinado a proporcionar la unidad formal subyacente, pero que no tenía ningún valor matemático, ya fuera dentro del propio tratado de Bourbaki o fuera de él», «Writing the Ultimate Mathematics Textbook: Nicolas Bourbaki's *Éléments de mathématique*», cit., p. 579.

[13] Nicolas Bourbaki, «The Architecture of Mathematics», *The American Mathematical Monthly*, vol. 57, núm. 4, 1950, pp. 221-232; reimpreso en François Le Lionnais (ed.), *Great Currents of Mathematical Thought, vol. 1. Mathematics: Concepts and Development* [1953], Nueva York, 1971, pp. 23-37.

de disciplinas autónomas». El método axiomático de Bourbaki permite «una sistematización de las relaciones existentes entre las diversas teorías matemáticas». Su proyecto mostrará la unidad subyacente de las matemáticas mediante un proceso de análisis y síntesis. Cada teoría se descompondrá en sus elementos constitutivos y las relaciones entre esos elementos serán descubiertas y reordenadas en una jerarquía de tipos de «estructura» matemática. Como tales, «las estructuras matemáticas se convierten, hablando propiamente, en los *únicos "objetos"* de las matemáticas». Bourbaki utiliza dos metáforas de la modernización para explicar su proyecto de reconstrucción: el París de Haussmann y la cadena de montaje de Taylor. Las matemáticas, escribe Bourbaki, son:

> Como una gran ciudad cuyos suburbios nunca dejan de crecer de una forma algo caótica en los terrenos circundantes, mientras que su centro es periódicamente reconstruido, siguiendo un plan cada vez más claro y una ordenación más majestuosa, demoliendo los viejos barrios con sus callejones laberínticos para lanzar nuevas avenidas hacia la periferia, siempre más directas, más anchas y más cómodas[14].

El método axiomático permite, argumenta Bourbaki, una «economía de pensamiento»: «Puede afirmarse, por lo tanto, que el método axiomático no es más que el "sistema taylorista" –la "gestión científica"– de las matemáticas». Sin embargo, la metáfora de la cadena de montaje fabril resulta inadecuada y Bourbaki se retracta inmediatamente de su afirmación: «Esta comparación no es lo bastante precisa; el matemático no trabaja mecánicamente como lo hace el obrero en la cadena de montaje; el papel fundamental que juega en su investigación una *intuición* especial no puede ser sobrestimado»[15]. El manifiesto está lleno de tales momentos de rechazo.

Aunque se proclamaban herederos del formalismo matemático de David Hilbert, los miembros del grupo Bourbaki trataban de excusarse de las acusaciones dirigidas contra el formalismo (que es un «esqueleto sin vida», como una máquina divorciada de la realidad física, de algún modo inhumana), desplegando un registro orgánico del lenguaje biológico (hablaban de organismos, de «estructuras madre», de «savia nutritiva», etcétera) junto con el registro inorgánico, moderno, a menudo arquitectónico, de la estructura y la forma. De hecho, el lenguaje biológico de Bourbaki se hace eco de la propia retórica de Hilbert. También él usaba

---

[14] N. Bourbaki, «The Architecture of Mathematics», cit., p. 34.
[15] *Ibid.*, p. 31

la metáfora romántica, biológica, de la totalidad orgánica para defender la unidad de las matemáticas: «En mi opinión, la ciencia matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada a la conexión de sus partes»[16].

El método de sustitución tropológica del manifiesto permite al «movimiento moderno» matemático coexistir con la intuición, con el romanticismo, con lo orgánico: en otras palabras, con todo lo que se dice que el movimiento moderno ha borrado de las matemáticas. El proyecto de Bourbaki, la unificación de las matemáticas, se desarrolla así en su manifiesto a escala tropológica: la unidad de las matemáticas se logra –aunque difícilmente– por la unificación de las imágenes y las metáforas variables de la unidad matemática. De hecho, Le Lionnais insinuó ese proyecto de unificación discursiva en su comentario: «El mensaje de Bourbaki, tan rico y cargado de significado, tiene como objetivo general un inventario sistemático de analogías en las matemáticas y al mismo tiempo una elucidación de su validez y de su significado»[17].

6

En la introducción a su volumen sobre teoría de conjuntos, Bourbaki invocó el rigor de los antiguos para defender la estabilidad esencial de las matemáticas: la invarianza del paradigma de legitimidad de la disciplina y sus conceptos de demostración y rigor, así como –hay que añadir– una genealogía esencialmente occidental (y no babilónica, india, china o árabe)[18]. Escriben:

> *Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux; et, aux époques où la notion a menacé de s'en perdre et*

[16] David Hilbert, «Mathematische Probleme», Vortrag, gehalten auf der internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900, en *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse*, Heft 3, 1900, p. 297: «*Die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganzes, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird*»; ed. inglesa: «Mathematical Problems», *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 8, núm. 10, 1902, pp. 478-479.
[17] François Le Lionnais (ed.), *Great Currents of Mathematical Thought*, cit., vol. I, p. 11.
[18] Compárese, por ejemplo, con Karine Chemla y Guo Shuchun, *Les neuf chapitres: Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, París, 2004.

> *où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les modèles. Mais à ce vénérable héritage sont venues s'ajouter depuis un siècle d'importantes conquêtes.*
>
> Desde la época de los griegos, quien dice matemáticas dice demostración; algunos incluso dudan de que se encuentren, fuera de las matemáticas, demostraciones en el sentido preciso y riguroso que los griegos daban a esta palabra y que pretendemos reproducir aquí. Podemos decir con justicia que ese sentido no ha cambiado, porque lo que constituía una demostración para Euclides sigue siéndolo para nosotros; y en momentos en que el concepto ha estado en peligro de perderse y, en consecuencia, la propia matemática se ha visto amenazada, es a los griegos a los que hemos recurrido en busca de modelos. Pero a este venerable legado se han añadido durante los últimos cien años importantes conquistas[19].

Bourbaki trató de identificar y codificar los aspectos esenciales e invariantes del lenguaje matemático: «Mediante el análisis del mecanismo de demostración en textos matemáticos adecuadamente elegidos, ha sido posible discernir la estructura subyacente tanto al vocabulario como a la sintaxis». Bourbaki afirmó que las demostraciones siempre pueden reconocerse como tales porque, bajo las variantes locales en la capa superficial del texto, comparten un estructura subyacente. Sin embargo, dado que el texto matemático se define por su formalización hipotética, la estructura subyacente de la demostración sólo existe como potencialidad. En la práctica, los matemáticos no hacen ni pueden hacer real el sueño de Leibniz: nunca escriben sus demostraciones en un lenguaje totalmente formal. Tal proyecto sería, señala Bourbaki, «absolutamente irrealizable», ya que la demostración más nimia al comienzo de la teoría de conjuntos ya requeriría varios cientos de signos para su total formalización». Bourbaki, por lo tanto, debe apelar a la «intuición» implícita del lector, a su «sentido común» y a su «confianza», «una confianza análoga a la concedida por una calculadora o un ingeniero a una fórmula o una tabla numérica sin ningún conocimiento de la existencia de los axiomas de Peano»[20].

El rigor de una demostración se juzga, no obstante, en relación con «la posibilidad de traducirla sin ambigüedades a tal lenguaje formalizado». Las artes de la lectura y la escritura de las matemáticas requieren una

[19] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Theory of Sets* [1970], Nueva York, 2004, p. 7; ed. orig.: *Éléments de mathématique. Première partie. Livre I. Théorie des ensembles*, Paris, Hermann & Cie, 1970, p. E I.7; reimpr. Springer, 2006; en línea: https://bit.ly/2RkSu3Q.
[20] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Theory of* Sets, cit., pp.7-10, 11; ed. orig.: *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*, cit., pp. E I.7, I.11. Los axiomas de Peano constituyen la formalización canónica de los números naturales y, por lo tanto, de la aritmética.

especie de doble visión: «Así, escrito de acuerdo con el método axiomático y manteniendo siempre a la vista, como en el horizonte, la posibilidad de una formalización completa, nuestra serie afirma tener un rigor perfecto». El estructuralismo matemático de Bourbaki suena aquí más bien a estructuralismo lingüístico (podrían estar discutiendo la *langue* y la *parole* del lenguaje matemático), y de hecho hacen referencia a la lingüística en la defensa de su proyecto:

> *De même que l'art de parler correctement une langue préexiste à la grammaire, de même la méthode axiomatique a été pratiquée bien avant l'invention des langages formalisés; mais sa pratique consciente ne peut reposer que sur une connaissance des principes généraux gouvernant ces langages et de leurs relations avec les textes mathématiques courants.*
>
> Así como el arte de hablar correctamente una lengua precede a la invención de la gramática, el método axiomático se había practicado mucho antes de la invención de lenguajes formalizados; pero su práctica consciente solo puede descansar sobre el conocimiento de los principios generales que rigen dichas lenguas y su relación con los textos matemáticos actuales[21].

A Bourbaki, sin embargo, no le preocupaban las «lenguas» en plural. Describe su «método axiomático» como una forma de trascender las limitaciones de la especialización. Cuando se enfrenta a «objetos matemáticos complejos», Bourbaki «desglosa sus propiedades» –algebraicas, topológicas, etcétera– y «las reagrupa en torno a un pequeño número de conceptos»: las «clasifica según las *estructuras* a las que pertenecen». En realidad, si alguna vez se pensó que los resultados en cada rama de las matemáticas dependían de la forma de intuición matemática característica de la misma, ahora es lógicamente posible, argumenta Bourbaki, «derivar prácticamente la totalidad de las matemáticas conocidas de una fuente única, la Teoría de Conjuntos». Bajo esa luz, Bourbaki ofrece los principios de un único lenguaje formalizado y luego especifica cómo «podría estar escrita en el mismo» la teoría de conjuntos, antes de mostrar cómo podrían encajar en su proyecto de lenguaje unificado otras varias ramas de las matemáticas.

---

[21] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*, cit., pp. E I.8, I.9. El estructuralismo matemático de Bourbaki se cruzó ocasionalmente con otros estructuralismos. André Weil, por ejemplo, trabajó con Claude Lévi-Strauss y escribió un apéndice matemático para la primera parte de *Las estructuras elementales del parentesco*: «Sobre el estudio algebraico de ciertos tipos de leyes matrimoniales (sistema Murngin)». Para un amplio análisis de los vínculos de Bourbaki con el estructuralismo francés, véase David Aubin, «The Withering Immortality of Nicolas Bourbaki: A Cultural Connector at the Confluence of Mathematics, Structuralism, and the OuLiPo in France», *Science in Context*, vol. 10, núm. 2, 1997, pp. 297-342.

7

Al igual que sucede con su autor ficticio, el misterioso «N. Bourbaki», y con sus grandiosas proclamaciones, los *Éléments de mathématique* fueron, como escribiría el poeta de OuLiPo y matemático Jacques Roubaud, un «tratado provocador y vanguardista», e incluso «una especie de surrealismo matemático»[22]. Ese surrealismo matemático de Bourbaki es quizá más evidente en el absurdo humor de su boletín interno, *La tribu*, subtitulado *Bulletin oecuménique apériodique et bourbachique*. Pero si el humor de *La tribu* tiende a una especie de surrealismo, el tratado de Bourbaki y su manifiesto, «L'architecture des mathematiques», revela las afinidades del grupo con otras corrientes de vanguardia: con el formalismo, con la ambición revolucionaria, con el utopismo moderno, con la *mathesis universalis* y otros proyectos de lenguaje universal, así como con el deseo de crear una obra de arte autónoma y unificada.

El experimentalismo formal era igualmente evidente en su método historiográfico. Muchos de los capítulos de su tratado iban acompañados de unas «notas históricas». Las «Instrucciones de uso» explican la razón por las que separar la historia de las matemáticas propiamente dichas:

> *Le texte étant consacré à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques; celles-ci sont groupées dans des Notes historiques. La bibliographie qui suit chacune de ces Notes ne comporte le plus souvent que les livres et mémoires originaux qui ont eu le plus d'importance dans l'évolution de la théorie considérée; elle ne vise nullement à être complète.*
>
> Dado que el texto consiste en principio en la exposición dogmática de una teoría, en general no contiene referencias bibliográficas, que se presentan agrupadas en *Notas históricas*, aunque solo se mencionen los libros y artículos originales de mayor importancia en la evolución de la teoría considerada; esa bibliografía no pretende en modo alguno ser completa[23].

De hecho, más que colecciones útiles de referencias, estas historias son extrañas piezas de prosa, de un estilo marcadamente diferente al del resto del texto: a menudo son muy subjetivas, a veces líricas, y oscilan

---

[22] Jacques Roubaud, «Mathematics in the Method of Raymond Queneau», p. 80; ed. orig. «La mathématique dans la méthode de Raymond Queneau», *Mathématiques: heur et malheur*, *Critique*, núm. 359, abril de 1977.
[23] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*, cit., pp. E I.6

entre la hagiografía de determinados matemáticos protomodernos individuales y llamamientos a la fuerza imparable y desindividualizada de las ideas. Las notas históricas de Bourbaki a menudo abarcaban un amplio lapso de tiempo: a veces se remontaban a los antiguos griegos o a los babilonios. Tendían a presentar la historia de las matemáticas como la prehistoria de Bourbaki.

Un número de *La tribu* de 1947 inventó el incidente de un informe histórico simulado como un discurso supuestamente inaugural, para burlarse tanto del álgebra como del estilo historiográfico de Bourbaki:

> La nota histórica de los capítulos 2-3 del *Álgebra*, leída en forma de discurso inaugural, puso al congreso «en buena disposición» para el álgebra: glorificaba a Fermat, seguía obedientemente los meandros del paradigma lineal y examinaba la influencia de Mallarmé sobre Bourbaki[24].

Paradójicamente, las constricciones de estilo axiomático impuestas al tratado de Bourbaki también generaron los excesos semánticos de *La tribu*: un desbordamiento de lenguaje no formal y lúdico; de pastiche, de parodia, de juegos de palabras, de tonterías y de poesías en las que las palabras se apoderan de los múltiples significados que se les negaban en los *Éléments de mathématique*. El sentido del humor absurdo de Bourbaki, velado en sus archivos, falta en muchas caracterizaciones del grupo. Roubaud, por ejemplo, afirmó que los OuLiPo eran a la vez «un homenaje a Bourbaki» y «una parodia de Bourbaki, incluso una profanación de Bourbaki», ya que:

> El plan inicial de Bourbaki –reescribir las matemáticas en su totalidad y proporcionarles bases sólidas utilizando una sola fuente, la teoría de conjuntos, y un sistema riguroso, el método axiomático–, es a la vez serio, admirable, imperialista, sectario, megalómano y pretencioso (el humor no era una de sus principales características)[25].

Sin embargo, los números del boletín de Bourbaki estaban llenos de bromas, historias sin sentido, engaños, neologismos y anécdotas ridículas de sus sucesivos congresos. Muchos de sus miembros venían de la École Normale Supérieure y *La tribu* se recrea en la jerga particular y el humor burlón propios de la misma. Hasta las listas de miembros

---

[24] *La tribu: Bulletin oecuménique, apériodique et bourbachique*, «Compte-rendu du Congrès de Noël» [1947], Archives Bourbaki.

[25] Jacques Roubaud, «The OuLiPo and Combinatorial Art» [1991], en Harry Mathews *et al.* (eds.), *OuLiPo Compendium*, Londres, 2005.

presentes en los congresos eran extravagantes: a veces incluían «extras» (cónyuges, hijos, lugareños, animales de granja, etcétera) y «accesorios» (coches, bicicletas, cochecitos, binoculares, aspirinas y otra parafernalia eran incluidos junto con adminículos habituales como la pizarra y su borrador). Los temas de *La tribu* también estaban salpicados de poesía: pastiches de Valéry o Mallarmé, por ejemplo, que creaban una genealogía mítica para la figura de Bourbaki u ofrecían un relato burlesco pretendidamente heroico de sus pasados triunfos.

La tribu era a menudo autoparódica. En el número 29, el informe del «Congrès de l'incarnation de l'ane qui trotte» es uno de esos ejemplos: el supuesto «burro al trote» es una lenta exposición matemática y el informe acumula aún más desprecio hacia el estilo de Bourbaki en una balada satírica. Esta *chanson paillarde* debía cantarse, según su autor, con la melodía de «J'ai une histoire à raconter» o «En descendant la rue d'Alger». Se burla del prefacio-manifiesto, de las «instrucciones de uso», de los *Éléments de mathématique* de Bourbaki. La canción, traducida de forma aproximada, dice algo así como esto:

> El modo de empleo de este Tratado (bis)
> Es de la mayor simplicidad (bis)
> Si algo no está claro
> Pues bien
> Basta que usted abstraiga
> Y vuelve la luz (bis).
>
> El alfabeto de todas las naciones (bis)
> Será empleado como ayuda (bis)
> En aras de la claridad
> A menudo
> Se usan fuentes más pequeñas
> Para los párrafos más importantes (bis).
>
> Los ejercicios son torturadores (bis)
> Aunque su enunciado sea seductor (bis)
> No trate de hacer
> Muchos
> Pues se dice que dos terceras partes
> Son falsos, o lo que es peor, auténticas tonterías (bis).
>
> Las notaciones, como usted verá (bis)
> Han sido muy mejoradas (bis)
> Y el mejor criterio
> Pues bien
> Es que en todo el planeta
> No hay quien las entienda (bis)

El orden seguido en la exposición (bis)
Ha sido muy meditado (bis)
Poniendo las cuestiones secundarias
Al principio
Y después, como corolarios
Lo que habrá que utilizar constantemente (bis)[26].

Bourbaki, como vemos, ya había decidido parodiar a Bourbaki (y hacerlo en verso) antes de que OuLiPo entrara en escena. El movimiento Bourbaki fue, al menos en parte, una serie de experimentos de género: desde sus obras (ciertamente menores) de pastiche literario, pasando por sus parábolas y su historiografía, hasta el gran experimento de los *Éléments de mathématique*, que convirtió el humilde texto de análisis en portador de una visión utópica. Los escritos publicados de Bourbaki y sus archivos muestran las enredadas visiones y notas discordantes de su utopía. Sin embargo, la imagen estructuralista no formal de las matemáticas de Bourbaki ganó fuerza tanto dentro como fuera de las disciplinas matemáticas, como evidencia incluso la formación del propio OuLiPo.

8

El OuLiPo –«Ouvroir de Littérature Potentielle» o «Taller de Literatura Potencial»– tuvo su primera reunión oficial el 24 de noviembre de 1960, convocado por Le Lionnais y el en otro tiempo escritor surrealista Raymond Queneau. La doctrina de Bourbaki de la formalización potencial inspiró y justificó el proyecto de literatura potencial de OuLiPo. El Manifiesto de Queneau defendía el uso lúdico de las matemáticas por OuLiPo para generar limitaciones poéticas. Después de todo, la historia nos muestra que los usos lúdicos e impuros de las matemáticas a menudo resultan reivindicados al final:

> Recordemos que la topología y la teoría de los números surgieron en parte de lo que solían llamarse «entretenimientos matemáticos» o «matemática recreativa», [...] que el cálculo de probabilidades no era al principio más que una antología de «diversiones», como afirma Bourbaki en la «Nota histórica» del vigesimoprimer fascículo sobre Integración. Y lo mismo se puede decir de la teoría de juegos hasta von Neumann[27].

---

[26] *La tribu* 29, Informe sobre el «Congrès de l'incarnation de l'Ane qui trotte», Cellessur-Plaine, 19-26 de octubre de 1952, en Archives de l'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki.

[27] Raymond Queneau, «Potential Literature», en Warren Motte (ed.), *OuLiPo: A Primer of Potential Literature*, Londres, 1998, p. 51.

OuLiPo se basaba en las matemáticas –técnicas combinatorias, álgebra booleana y el método axiomático de Bourbaki, por ejemplo– en su práctica literaria. Su objetivo era «proponer nuevas "estructuras" a los escritores, de naturaleza matemática», o «inventar nuevos procedimientos artificiales o mecánicos que contribuyan a la actividad literaria». El manifiesto de Queneau proseguía demostrando algunos ejercicios oulipeanos: «Redundancia en Mallarmé», «El método S + 7» e «Isomorfismos»[28].

Las estructuras de Bourbaki fueron fundamentales para el texto fundacional de Le Lionnais para el grupo. «LiPo (Primer Manifeste de l'OuLiPo)» (1961) [Gallimard, 1963] comienza como lo hacen muchos manifiestos: parodiando la retórica típicamente exagerada del género. La «literatura potencial» es anunciada como inminente, necesaria y urgente, como atestigua «la impaciencia de las multitudes hambrientas». En el relanzamiento de Le Lionnais, la Querella entre los Antiguos y los Modernos funciona como una prehistoria grandiosa para el advenimiento de OuLiPo. El manifiesto desafía a su lector con preguntas absurdas, exageradas: «¿Recuerdas la polémica que acompañó la invención del lenguaje?»; «Y la creación de la escritura y la gramática, ¿crees que eso sucedió sin contienda?»; «¿Debería la humanidad descansar y quedar satisfecha al ver nuevos pensamientos expresados en versos antiguos?»[29].

9

Una década después, el «Segundo Manifiesto» de Le Lionnais anunció que era hora de abordar «la cuestión de la semántica». Basándose en la obra retórica de Bourbaki «L'architecture des mathématiques», invocaba un registro orgánico, biológico. Los escépticos del OuLiPo podrían preguntar:

> ¿Pero puede ser viable una estructura artificial? ¿Tiene la menor posibilidad de echar raíces en el tejido cultural de una sociedad y producir hojas, flores y frutos? [...]. Este problema se puede comparar, *mutatis mutandis*, con el de la síntesis en un laboratorio de materia viva. Que hasta ahora no se haya conseguido una prueba *a priori* de que ello sea imposible [...]. El OuLiPo

---

[28] R. Queneau, «Literatura potencial». Redundancia: dado que la esencia de los sonetos de Mallarmé se concentraba en la última palabra de cada verso, el resto se podía eliminar. S + 7: tome un texto cualquiera y reemplace cada sustantivo con el séptimo que le siga en el diccionario. Isomorfismo: sustituya palabras de un texto por otras que suenen similares.

[29] François Le Lionnais, «Lipo: First Manifesto» [1962] en *OuLiPo: A Primer of Potential Literature*, cit., pp. 26-29.

> ha preferido arrimar el hombro, reconociendo además que la elaboración de estructuras literarias artificiales podría ser infinitamente menos complicada y difícil que la creación de vida[30].

Si bien la mayoría de las estructuras artificiales creadas por el OuLiPo existen en un estado potencial a la espera de su animación cultural, algunas de ellas se descubren o desvelan en formas culturales existentes: nos topamos con ellas en la naturaleza, por decirlo así. Le Lionnais recuerda los comentarios de Bourbaki sobre las estructuras matemáticas y su relación con la realidad empírica:

> Desde el punto de vista axiomático, las matemáticas aparecen en general como un depósito de *formas* abstractas, las estructuras matemáticas; y a veces sucede, sin que nadie sepa realmente por qué, que ciertos aspectos de la realidad experimental siguen el modelo de algunas de esas formas, como si se tratara de una especie de preadaptación[31].

De hecho, sigue siendo sorprendente, incluso asombroso, que las estructuras, ecuaciones y otra parafernalia que los matemáticos inventan para sus propios propósitos, a menudo resulten ser modelos precisos de procesos naturales o herramientas útiles para comprender la realidad física. Jean Piaget incluso estudió la correspondencia entre las «estructuras matrices» de Bourbaki –las estructuras algebraicas, de orden y topológicas– y las «operaciones» elementales que utilizan los niños al comenzar a interactuar con el mundo[32]. Lo que Bourbaki llama «preadaptación», Le Lionnais prefiere denominarlo «plagio por anticipación». En ocasiones, escribe, los miembros del OuLiPo «descubren que una estructura que creíamos completamente nueva ya había sido de hecho descubierta o inventada en el pasado». Cuando esto sucede, el OuLiPo «se honra en reconocer tal estado de cosas calificando el texto en cuestión como "plagio por anticipado"»[33].

10

Muchos de los textos del OuLiPo son manifiestos. De hecho, como el manifiesto es un género de potencialidad –situado entre lo que ya se ha hecho y lo que está por hacer–, se trata de un vehículo particularmente

---

[30] F. Le Lionnais, «Second Manifesto» [1973], en *ibid.*, pp. 30-31.
[31] N. Bourbaki, «The Architecture of Mathematics», cit., p. 36.
[32] Jean Piaget, *Structuralism*, Londres, 1971, p. 28; ed. orig.: *Le structuralisme*, París, 1968; ed. cast.: *El estructuralismo*, Buenos Aires, 1971.
[33] F. Le Lionnais, «Second Manifesto», cit., p. 31.

adecuado para la «Literatura Potencial» del grupo. La analogía entre literatura y matemáticas es fundamental para el OuLiPo. Entre los miembros del grupo había matemáticos profesionales como el propio Roubaud, Claude Berge y Paul Braffort. Roubaud sostiene que para los miembros del OuLiPo, la «exhaución» de formas y reglas literarias tradicionales «es el punto de partida en la búsqueda para una segunda fundación, la de las matemáticas». El OuLiPo quiere reemplazar reglas con restricciones axiomáticas y formas con estructuras bourbakianas. Allí donde anteriores vanguardias literarias y artísticas –vorticismo, futurismo– desarrollaron y desplegaron diversas jergas, a menudo de un tipo matemático informal, el OuLiPo trataba de explicar y codificar sus matemáticas literarias. No utilizaba las matemáticas simplemente como un discurso legitimador, como un código de su modernidad, autonomía o postura estética, ni meramente como fuente de metáforas; por el contrario, para Roubaud, Queneau y sus camaradas la afinidad de la literatura con las matemáticas era y es un fin en sí mismo: «Las matemáticas reparan la ruina de las reglas»[34].

Sin embargo, aquí podríamos hacer una pausa y recordar la crítica de Adorno a tales afinidades estéticas con las matemáticas. Para él, aunque las matemáticas comparten ciertas características con el arte («en función de su formalismo, las matemáticas son de por sí conceptuales; sus signos no son signos de algo y no formulan juicios existenciales, como no lo hace el arte; a menudo se ha observado su calidad estética»), los intentos de equiparar directamente formas estéticas y formas matemáticas son actos de autoengaño y abnegación. Al igual que Roubaud, Adorno entendía el recurso a las matemáticas como algo motivado por la ruina de las reglas. Roubaud se contentó con recurrir a las matemáticas en busca de inspiración, de los axiomas y estructuras mediante los que podría generar su «literatura potencial». Adorno, por su parte, argumentó que las matemáticas no pueden reparar la ruina de las reglas:

> La matematización en tanto que método para la objetivación inmanente de la forma es quimérica. Su insuficiencia se podría explicar diciendo que la matematización se ha intentado en fases históricas en que se deshace la obviedad tradicional de las formas y al artista no se le da un canon. Entonces recurre a las matemáticas; éstas combinan el estado de razón subjetiva en que el artista se encuentra con la apariencia de objetividad de acuerdo con categorías como universalidad y necesidad[35].

---

[34] Jacques Roubaud, «Mathematics in the Method of Raymond Queneau», en OuLiPo: *A Primer of Potential Literature*, cit., p. 93.
[35] Theodor Adorno, *Ästhetische Theorie*, Suhrkamp Verlag, Frankfurt, 1970, p. 213; ed. cast.: *Teoría estética*, Madrid, Ediciones Akal, 2004, p. 193.

Pero que el artista salga del dominio de la estética en busca de una fuente de legitimidad sólo sirve, no obstante, para socavar aún más la pretensión de legitimidad del arte. «En vez de encarnar –dice Adorno– la legalidad perdurable del ser, su propia pretensión de legitimidad, el aspecto matemático del arte se esfuerza desesperadamente por garantizar su posibilidad en una situación histórica en la que se exige la objetividad del concepto de forma al mismo tiempo que el nivel de consciencia la inhibe». Las estructuras importadas de las matemáticas pueden ofrecer la «apariencia» de objetividad, pero, argumenta Adorno, esas estructuras y esa objetividad se desmoronan en el acto de la traducción: «La organización, la relación de los elementos entre sí que constituye la forma, no brota de la figura especifica y fracasa ante los detalles»[36].

Para Queneau, miembro fundador del OuLiPo, ese desmoronamiento, ese fracaso, esa traducción entrecortada, era algo que se debía asumir y representar. En sus «Fundamentos de literatura (al estilo de David Hilbert)», Queneau formula un sistema axiomático para la literatura[37]. El texto es a la vez un tributo a Hilbert, un pastiche de su estilo axiomático, y una crítica de Hilbert. El primer párrafo de *À la recherche du temps perdu*, la conexión estructural de las frases de Flaubert y el capítulo XCVIII de *Tristram Shandy* se tamizan, filtran y deforman a medida que se confrontan con los axiomas extraídos de las *Grundlagen der Geometrie* (1899) de Hilbert. Queneau escenifica así un enfrentamiento entre el método axiomático y las particularidades de la literatura, creando un manifiesto que proclama, mediante su propia lógica interna, la imposibilidad de una formalización completa[38].

---

[36] *Ibid.*, pp. 188-189; *ibid.*, pp. 193-194 de la ed. cast.

[37] Hilbert había respondido a la objeción de Frege a su sistema axiomático afirmando: «Pero sin duda es obvio que toda teoría es solo un andamiaje o esquema de conceptos junto con sus necesarias relaciones mutuas, y que los elementos básicos pueden pensarse de la forma que uno quiera. Si al hablar de mis puntos pienso en algún otro sistema de cosas, por ejemplo, el sistema: amor, ley, deshollinador [...] y asumo todos mis axiomas como relaciones entre esas cosas, mis proposiciones, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, también serían válidas para esas cosas», David Hilbert a Gottlob Frege, 29 de diciembre de 1899, en Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Oxford, 1980, carta IV/4, p. 39.

[38] Raymond Queneau, «Les fondements de la littérature: d'après David Hilbert» [1973], Bibliothèque Oulipienne, vol 1, núm. 3, París, Éditions Ramsay, 1987; ed. ing.: «The Foundations of Literature (after David Hilbert)» [1973], in *Oulipo Laboratory: Texts from the Bibliothèque Oulipienne by Raymond Queneau, Italo Calvino, Paul Fournel, Jacques Jouet, Claude Berge & Harry Mathews*, Londres, 1995, pp. 2-15.